DURÉE : 4 heures

Dans le problème, on considère une variable aléatoire X à valeurs entières, ou à valeurs réelles et pourvue d'une densité. Une fonction f à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}$, étant donnée, on se propose de déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $f(X)$ ou la densité de cette variable aléatoire. On se contentera d'examiner quelques types de fonctions f et notamment des fonctions périodiques. C'est fait dans la deuxième partie pour des variables X discrètes, dans la troisième partie pour des variables X admettant des densités. Les résultats, concernant des sommes de séries entières, obtenus dans une première partie sont utilisés directement dans la deuxième partie ; ces deux parties sont ainsi liées. La troisième partie est indépendante des deux autres.

PREMIÈRE PARTIE

Une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de la variable réelle x à rayon de convergence R non nul étant donnée, on désigne par h la fonction somme définie sur $]-R, +R[$ par : $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Soit p un entier donné strictement supérieur à un, on définit les fonctions h_k (où $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$) au moyen des formules :

$$h_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{pn} x^{pn}, \ldots, h_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{pn+k} x^{pn+k}, \ldots$$

On expérimente dans cette première partie diverses méthodes pour déterminer explicitement ces fonctions dans quelques cas particuliers.

I. Convergence et premiers exemples

1.*a.* Montrer, dans le cas général, que les séries définissant $h_0, h_1, \ldots, h_{p-1}$ ont des rayons de convergence supérieurs ou égaux à R et que l'une au moins d'entre elles admet R pour rayon de convergence.

b. Donner un exemple simple, comportant des coefficients a_n tous strictement positifs, où l'un de ces rayons est infini alors que $R \neq +\infty$.

2. On suppose dans cette question que tous les a_n sont égaux à un et que l'entier p est quelconque (supérieur strictement à un).

a. Déterminer R et les rayons de convergence des séries définissant $h_0, h_1, \ldots, h_{p-1}$.

b. Déterminer les fonctions $h, h_0, h_1, \ldots, h_{p-1}$. Vérifier, dans le cas présent, la relation générale liant h aux autres fonctions h_k.

II. Étude dans le cas de la série exponentielle

Dans cette question, on suppose $a_n = \frac{1}{n!}$. Deux méthodes sont successivement proposées.

1. *Utilisation des séries exponentielles complexes.*

En utilisant certaines combinaisons linéaires de développements en série entière de fonctions du type $x \mapsto e^{ax}$ (où a est éventuellement un nombre complexe), déterminer explicitement, sous forme réelle, les fonctions h_k pour $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ dans les cas suivants :

a. Le nombre entier p est égal à deux (on pourra utiliser $a = 1$ et $a = -1$) ;

b. Le nombre entier p est égal à trois (on pourra employer pour a les nombres $1, j, j^2$ qui sont les trois racines cubiques de l'unité). On exprimera h_0, h_1, h_2 à l'aide de la fonction exponentielle et de fonctions circulaires ;

c. Le nombre entier p est égal à quatre ;

d. Peut-on généraliser cette méthode pour un entier p quelconque ?

2. *Utilisation d'équations différentielles.*

a. On suppose $p = 3$. En exprimant la somme $h_0 + h_1 + h_2$ à l'aide de h_2 et des dérivées h_2' et h_2'', déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée sur $\mathbb{R}$ par la fonction h_2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ cette équation et déterminer explicitement h_2 sous sa forme réelle en utilisant $h_2(0)$ et $h_2'(0)$. Déterminer enfin h_1 et h_0.

A SUIVRE

b. On suppose $p = 4$. En utilisant notamment un résultat de II.1.*a.*, prouver que :

$$h_3''(x) + h_3(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

En déduire la fonction h_3 puis la fonction h_1. Déterminer de même h_2 et h_0.

III. Étude dans le cas de séries « binômes »

Dans cette question, on suppose que α est un nombre réel strictement positif. On rappelle que si x est dans $]-1, +1[$,

$$(*) \qquad (1-x)^{-\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!} x^n.$$

1. *Première méthode pour* $\alpha = 2$.

On suppose $h(x) = (1-x)^{-2}$ (autrement dit $\alpha = 2$) et on se place uniquement dans les cas $p = 2$, $p = 3$, $p = 4$. En utilisant la méthode décrite dans la question II.1. et en admettant que, pour α entier, la formule (*) est encore valable en remplaçant x par ax où $a \in \mathbb{C}$, déterminer les fonctions h_k sur $]-1, +1[$ sous forme de fonctions rationnelles.

2. *Deuxième méthode pour* $\alpha = 2$.

a. Soit k un entier compris entre 0 et $p-1$, déterminer explicitement la fonction u définie sur

$$]-1, +1[\text{ par } u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{pn+k+1}.$$

b. En utilisant u', déterminer les fonctions h_k pour $\alpha = 2$, p entier quelconque vérifiant $p > 1$. Retrouver ainsi les résultats du III.1.

3. *Calcul des* h_k *pour* $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $p = 2$.

a. Calculer pour $x \in]-1, +1[$, en utilisant les mêmes techniques que dans II.1.*a.*, les fonctions sommes h_0 et h_1 définies par :

$$h_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (4n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (4n)} x^{2n}$$

et

$$h_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (4n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (4n+2)} x^{2n+1}.$$

b. Montrer que la dérivée de $x \longmapsto xh_0(x) - h_1(x)$ s'exprime simplement à l'aide de h_0. En utilisant encore la somme $h = h_0 + h_1$, déterminer puis intégrer une équation différentielle vérifiée par h_0 (Cette résolution peut être facilitée par le calcul de la dérivée de $x \longrightarrow \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$). Retrouver ainsi les résultats de *a.*

4. *Calcul des fonctions* h_k *pour* $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $p = 4$.

On pose pour $x \in]-1, +1[$:

$$v(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (4n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (4n)} x^{2n}$$

$$w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (4n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (4n+2)} x^{2n+1}.$$

Tournez la page S.V.P.

a. Montrer que si la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution au voisinage de zéro de l'équation différentielle :

(E) $$(1 + x^2) y'' + 3xy' + \frac{3}{4} y = 0,$$

les coefficients a_n vérifient la relation :

$$4(n + 1)(n + 2) a_{n+2} + (2n + 1)(2n + 3) a_n = 0.$$

En déduire que v et w sont des solutions de (E).

b. Soit la nouvelle variable $t = \text{Arctan } x$. Montrer que $t \longmapsto Y(t) = Y(\text{Arctan } x) = y(x)$ vérifie l'équation (E') :

(E') $$Y'' + \tan(t)\, Y' + \frac{3}{4}(1 + \tan^2 t)\, Y = 0.$$

c. Montrer que les fonctions φ et ψ définies sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ par $\varphi(t) = \left(\cos\frac{t}{2}\right)\sqrt{\cos t}$ et $\psi(t) = \left(\sin\frac{t}{2}\right)\sqrt{\cos t}$ sont solutions de E'.

d. Exprimer $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ à l'aide de $x = \tan(t)$. En admettant que deux solutions de (E) dans $]-1, +1[$ sont identiques si leurs valeurs en $x = 0$ et les valeurs de leurs dérivées au point $x = 0$ coïncident respectivement, calculer $v(x)$ et $w(x)$.

e. En utilisant des combinaisons linéaires convenables de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $v(x)$ et $w(x)$, déduire de ce qui précède h_0, h_1, h_2, h_3.

DEUXIÈME PARTIE

Sur un espace probabilisé donné, on considère une variable aléatoire X discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ pourvue de la loi de probabilité définie par $p_n = P(X = n)$. On se propose de déterminer la loi de probabilité de $f(X)$ où f est une fonction périodique donnée. On admettra que $f(X)$ est bien une variable aléatoire.

I. Cas d'une variable de Poisson

Le nombre strictement positif λ étant donné, on suppose que, pour tout entier n positif ou nul, $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ et que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{p}\right)$ où p est un entier donné strictement supérieur à un.

a. Déterminer pour $p = 3$ et $p = 4$ les valeurs prises par $f(X)$.

b. Toujours dans les deux cas $p = 3$ et $p = 4$, déterminer la loi de probabilité de $f(X)$. Calculer l'espérance de $f(X)$ dans ces deux cas.

II. Autre exemple

On suppose que θ est un réel strictement positif donné et que pour tout entier n positif ou nul,

$$p_n = (1 + \theta)^{-2}(n + 1)\left(\frac{\theta}{1 + \theta}\right)^n.$$

Vérifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ et déterminer la loi de probabilité de $f(X)$ pour les cas $p = 3$ et $p = 4$.

A SUIVRE

TROISIÈME PARTIE

Soit, à présent, une variable aléatoire X admettant sur $\mathbb{R}$ une densité ρ (continue dans I). On se propose de même d'étudier la variable aléatoire $f(X)$ pour quelques types de fonctions f.

I. Cas d'une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$

a. On suppose que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que l'image de f est $]0, +\infty[$. Déterminer la fonction de répartition Φ de $f(X)$ en utilisant des intégrales faisant intervenir f^{-1} et ρ.

b. On suppose en outre f de classe $\mathscr{C}^1$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout x réel. Montrer que $f(X)$ admet une densité et déterminer cette densité.

c. Soit f définie par $f(x) = e^x$.

Déterminer la densité de $f(X)$ dans le cas où ρ est définie par $\rho(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$. La variable $f(X)$ admet-elle une espérance ?

II. Exemples de fonctions f non monotones sur $\mathbb{R}$

a. On suppose $f(x) = x^2$ et $\rho(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$. Montrer que $f(X)$ admet une densité et déterminer cette densité.

b. On suppose que la variable X est uniforme sur $[-1, +1]$ et que la fonction f est définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \ln|x|$ et par $f(0) = 0$.

Montrer que $f(X)$ admet une densité que l'on calculera.

III. Cas d'une fonction f périodique sur $\mathbb{R}$

On suppose dans ce qui suit que $\rho(t) = 0$ si $t < 0$ et que ρ est continue décroissante sur $]0, +\infty[$.

a. Préliminaire. Prouver les propriétés suivantes :

1. Pour tout réel u, $\sum_{k=0}^{+\infty} \rho(u + 2k\pi)$ est convergente.

2. Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$, prouver que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout u de $[a, b]$, $\sum_{k=N+1}^{+\infty} \rho(u + 2k\pi) < \varepsilon$. (On commencera par comparer cette somme à $\frac{1}{2\pi} \int_{a+2N\pi}^{+\infty} \rho(t)\, dt$.)
En déduire la continuité sur $]0, +\infty[$ de la fonction $u \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \rho(u + 2k\pi)$ et la formule :

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} \rho(u + 2k\pi)\, du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b \rho(u + 2k\pi)\, du.$$

b. On suppose f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$. Déterminer la fonction de répartition puis la densité de $f(X)$ dans le cas où $\rho(t) = e^{-t}$ si $t \geqslant 0$.

c. Dans le cas des hypothèses générales données ci-dessus pour ρ et de la fonction f définie par $f(x) = \sin x$, déterminer la fonction de répartition puis la densité de $f(X)$ en les exprimant à l'aide de séries faisant intervenir notamment la fonction ρ.

FIN